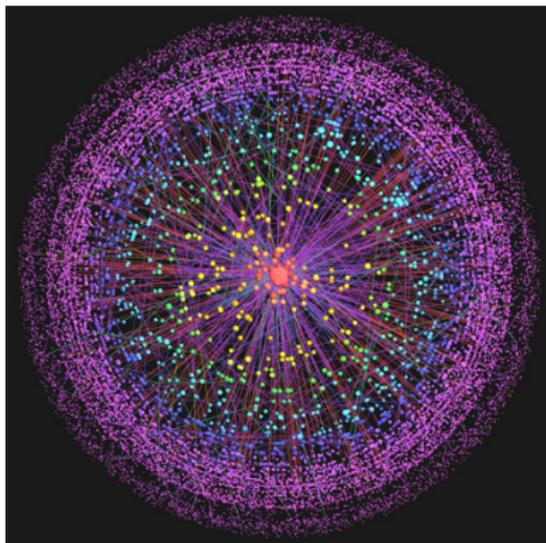


Giochi su reti: la matematica dei sistemi interconnessi intelligenti

Fabio Fagnani, Dipartimento di Scienze Matematiche 'G.L.
Lagrange', Politecnico di Torino

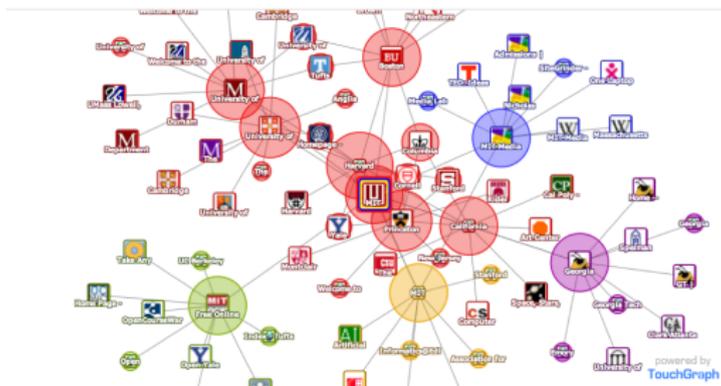
L'era delle interconnessioni



Internet: 8 miliardi di dispositivi connessi

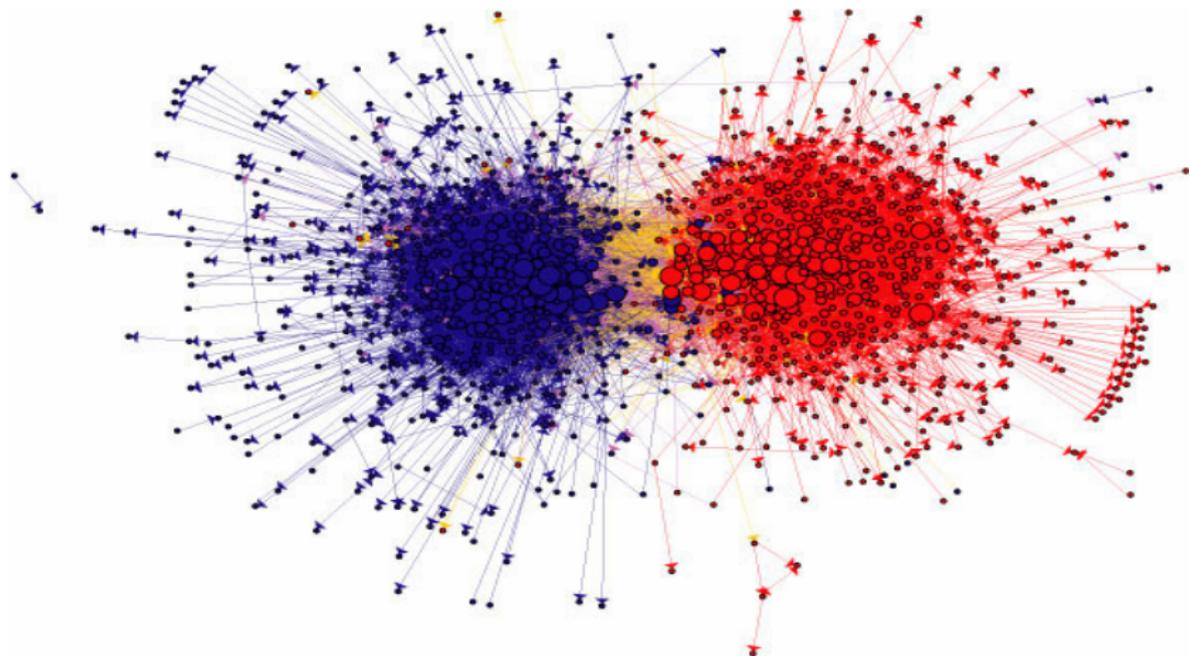
Il World-Wide Web

4 miliardi di pagine web



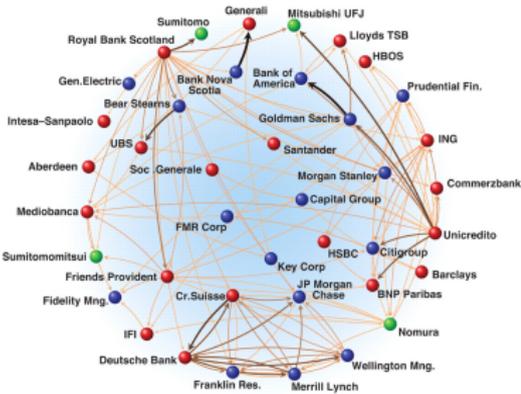
The web link structure centered at <http://web.mit.edu>

Rete di blog

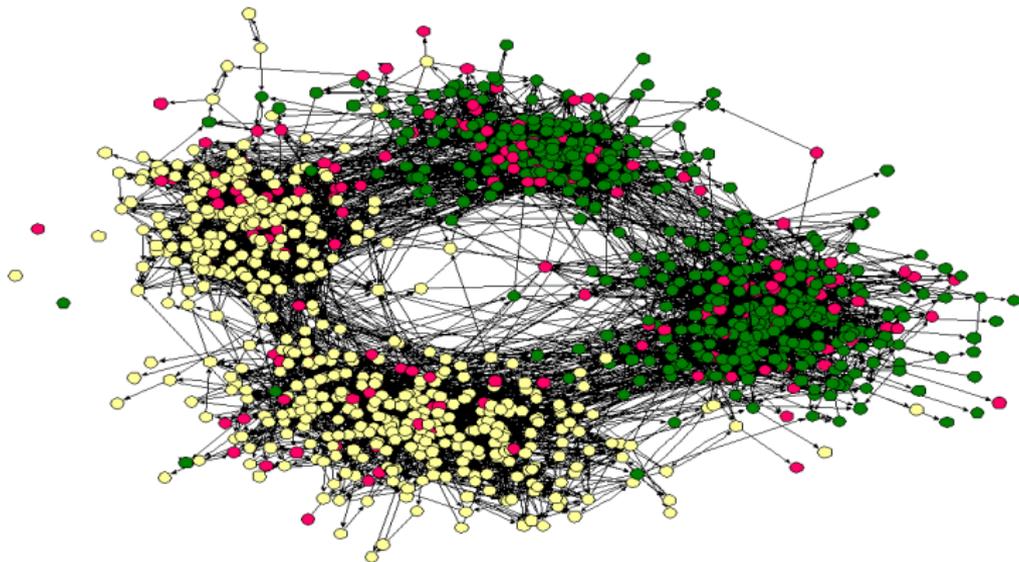


Adamic and Glance, 'The Political Blogosphere and the 2004 U.S. Election: Divided They Blog', 2005

Le reti prima di internet

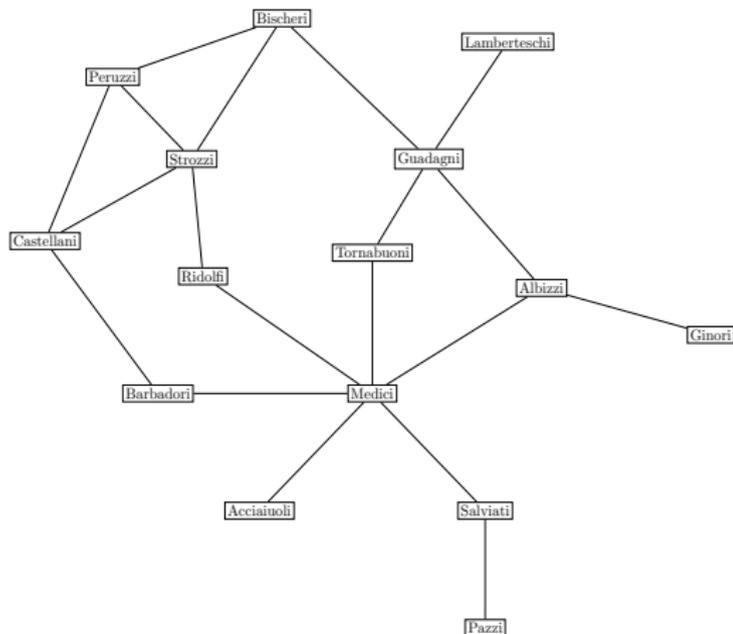


Rete di amicizie in una scuola superiore



Moody, 'Race, school integration, and friendship segregation in America', 2002

Un'antica rete



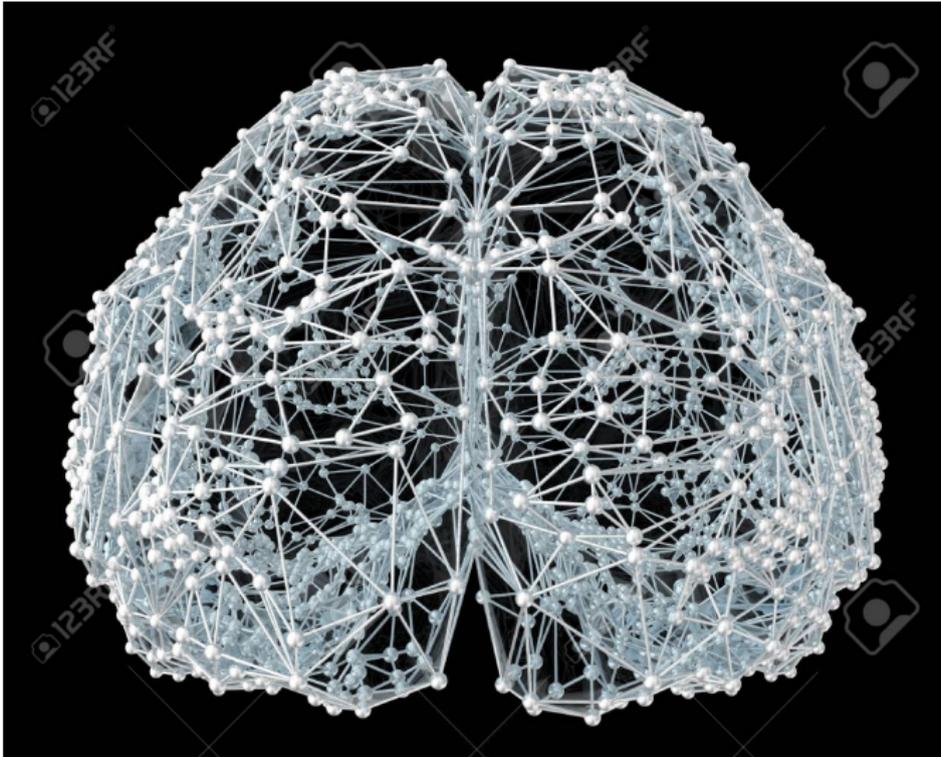
“Lorenzo de' Medici”
G. Vasari, 1534

Padgett and Ansell, ‘Robust action and the rise of the Medici, 1400-1434’, 1993

Reti biologiche



Reti neurali



Il cervello

Lo studio delle reti complesse

Reti complesse: Sistemi di (un numero enorme di) unità interagenti (relativamente semplici)

- ▶ reti infrastrutturali: trasporto, distribuzione di energia, gas e luce, reti fognarie, Internet
- ▶ reti di informazione: WWW, reti di citazione
- ▶ reti sociali: amicizie, famiglie, Facebook etc.
- ▶ reti economiche: supply chains, reti di produzione
- ▶ reti finanziarie: borrowing-lending nets
- ▶ reti biologiche: reti neurali, interazioni geni/proteine
- ▶ reti ecologiche: food webs, flocking, ...

struttura della rete + meccanismo di interazione



comportamento emergente

Lo studio delle reti complesse

Quali sono i problemi:

- ▶ Prevederne il comportamento globale
- ▶ Progettarle in modo da essere efficienti e resilienti
(*mechanism design*)

Lo studio delle reti complesse

Quali sono i problemi:

- ▶ Prevederne il comportamento globale
- ▶ Progettarle in modo da essere efficienti e resilienti (*mechanism design*)

Le grandi sfide:

- ▶ Spesso troppo complesse per essere gestite centralmente
- ▶ Agenti autonomi con obiettivi tra loro spesso conflittuali
- ▶ Interazione di uomini e macchine
- ▶ Il pericolo degli effetti a catena

Lo studio delle reti complesse

Quali sono i problemi:

- ▶ Prevederne il comportamento globale
- ▶ Progettarle in modo da essere efficienti e resilienti (*mechanism design*)

Le grandi sfide:

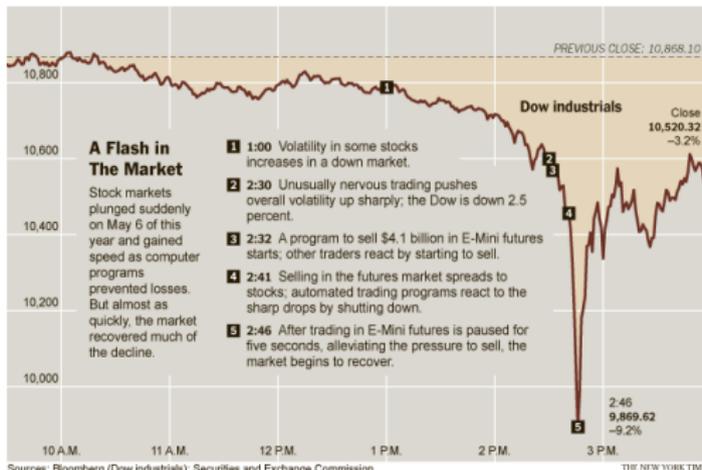
- ▶ Spesso troppo complesse per essere gestite centralmente
- ▶ Agenti autonomi con obiettivi tra loro spesso conflittuali
- ▶ Interazione di uomini e macchine
- ▶ Il pericolo degli effetti a catena

Una domanda di fondo:

- ▶ Le nuove tecnologie informatiche, l'IA sono vantaggiose o svantaggiose nella gestione della complessità?

Il flash crash del 2010

- ▶ Il 6 maggio 2010 l'indice Dow Jones, della borsa valori di New York, crolla del 10% in soli 15 minuti, senza apparente motivo
- ▶ La causa fu appurata essere la **massiccia presenza di algoritmi di negoziazioni ad alta frequenza** che avevano innescato un'enorme quantità di vendite di Futures



Fallimenti a catena

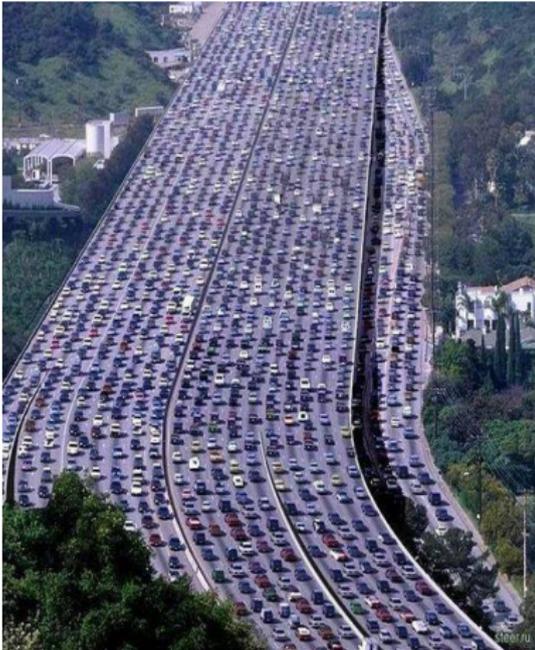
- ▶ 17.17 del 9 novembre 1965: guasto nella centrale idroelettrica di Niagara Falls (USA)
- ▶ 12 minuti dopo si oscura l'intero stato di New York, a seguire Massachusetts, Connecticut, Rhode Island, Vermont, Maine, New Hampshire e due province canadesi.
- ▶ paralisi del traffico, gli ospedali sospendono le operazioni chirurgiche, gli aerei non possono atterrare sulle piste, migliaia di persone rimangono bloccati in ascensore e nelle metropolitane



Fallimenti a catena

- ▶ Molti black-out elettrici da allora: 1977 (New York), 2003 (Europa, USA)
- ▶ Molte le cause: incidenti, picchi di consumi, errori operativi
- ▶ enormi perdite: 100 miliardi USD per anno nei soli US

Fallimenti a catena



China Highway 110, August 2010,
coda di 100 km, 10 giorni



Nei soli US le congestioni del traffico
costano 120 miliardi USD all'anno

Le nuove sfide

- ▶ Come progettare reti efficienti e resilienti o come migliorare la resilienza di quelle esistenti
- ▶ Come sfruttare le tecnologie informatiche e i big data
- ▶ Come far interagire macchine con macchine e macchine con uomini (veicoli a guida autonoma)

Le nuove sfide

- ▶ Come progettare reti efficienti e resilienti o come migliorare la resilienza di quelle esistenti
- ▶ Come sfruttare le tecnologie informatiche e i big data
- ▶ Come far interagire macchine con macchine e macchine con uomini (veicoli a guida autonoma)

Un paradigma scientifico: i giochi su reti

Teoria delle reti (Interazioni) + Teoria dei Giochi (Strategie)

- ▶ I nodi della rete sono agenti strategici che interagiscono. Essi mirano solo a massimizzare la loro funzione utilità.
- ▶ Le funzioni utilità sono fatte in modo da spingere così il sistema ad un ottimo sociale *Cooperative AI*

I punti di oggi

- ▶ Breve introduzione alla teoria dei grafi
- ▶ Breve introduzione alla teoria dei giochi
- ▶ I giochi su reti: il gioco di maggioranza, il gioco dei colori

I punti di oggi

- ▶ Breve introduzione alla teoria dei grafi
- ▶ Breve introduzione alla teoria dei giochi
- ▶ I giochi su reti: il gioco di maggioranza, il gioco dei colori

La teoria dei grafi

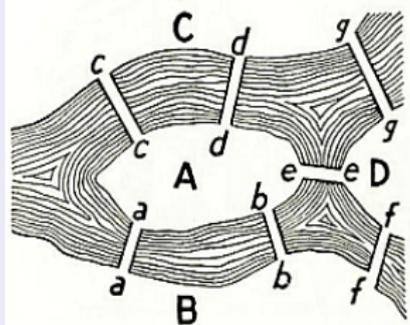
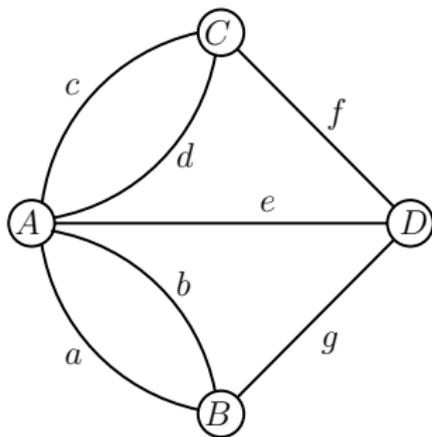


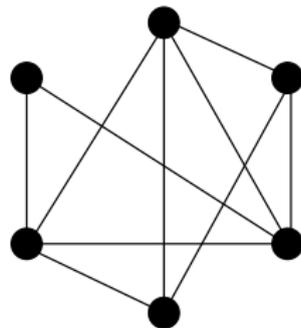
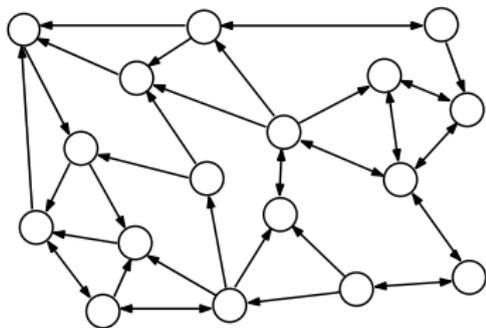
FIGURE 98. *Geographic Map:
The Königsberg Bridges.*



L. Eulero (1707–1783)



La teoria dei grafi



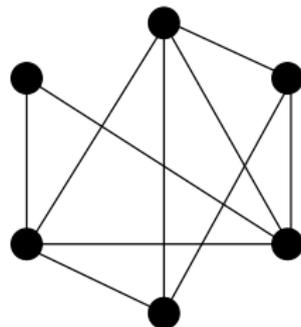
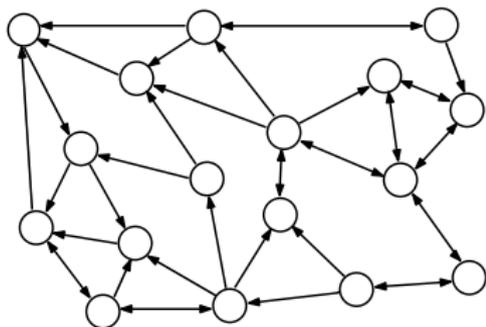
Grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

\mathcal{V} = insieme dei **nodi** (vertici)

\mathcal{E} = insieme degli **archi**

archi possono essere diretti o indiretti

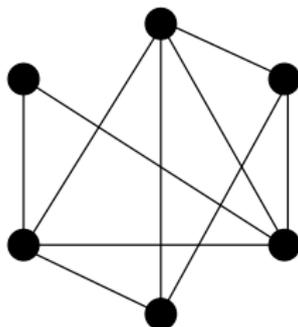
Le reti come grafi



Grafo modella la topologia delle interconnessioni nella rete

- ▶ Internet: nodi=router, archi = collegamenti fisici diretti (ind.)
- ▶ World Wide Web: nodi = pagine web, archi=hyperlink (dir.)
- ▶ reti stradali: nodi=incroci, archi=strade (dir.)
- ▶ reti finanziarie: nodi=entità fin., banche, archi=debiti, obbligazioni, ecc. (dir.)
- ▶ reti sociali: nodi=individui, archi=amicizia/follower

Vicini e grado dei nodi

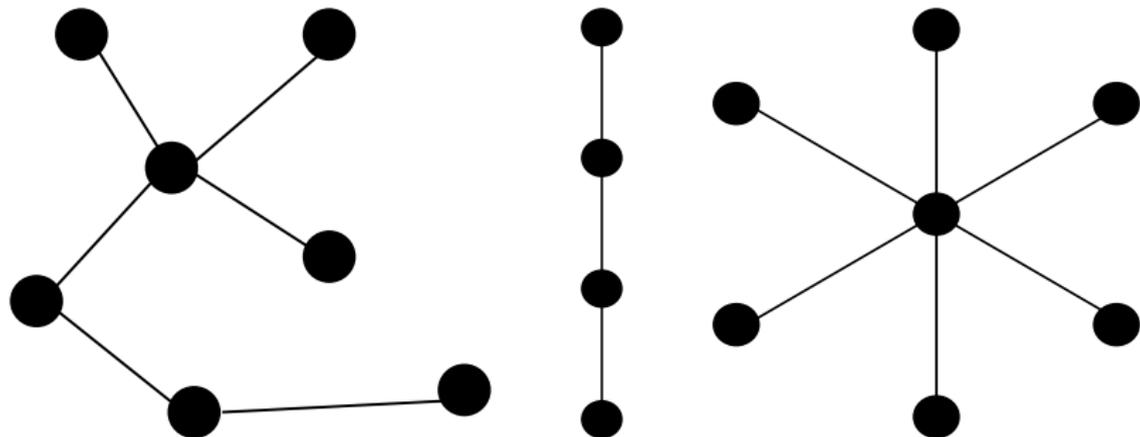


Grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ indiretto

- ▶ nodo j vicino di i se esiste arco $i \leftrightarrow j$
- ▶ grado di nodo i : $w_i =$ numero di vicini di i
- ▶ **Lemma della stretta di mano**: in un grafo semplice, la somma dei gradi di tutti i nodi è pari a 2 volte il numero degli archi m

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} w_i = 2m$$

Alberi



▶ **albero**: grafo semplice connesso senza cicli

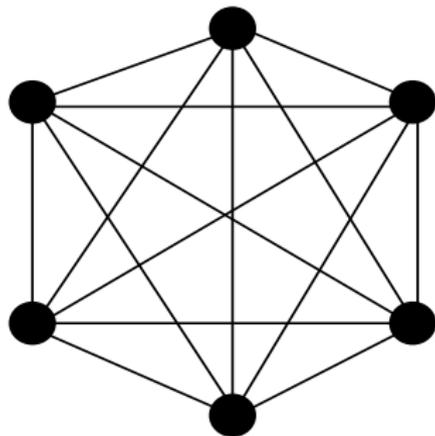
▶ n numero di nodi, m numero di archi

Teorema:

▶ ogni grafo semplice connesso ha $m \geq n - 1$ archi indiretti

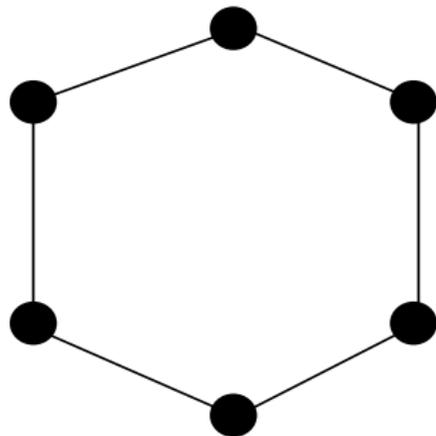
▶ grafo semplice connesso con $m = n - 1$ archi \iff albero

Altri grafi semplici classici



grafo completo K_n

$$m = n(n - 1)/2$$



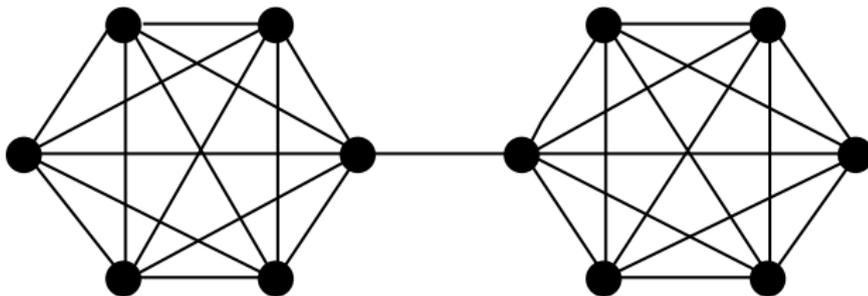
grafo anello

$$m = n$$

Altri grafi semplici classici

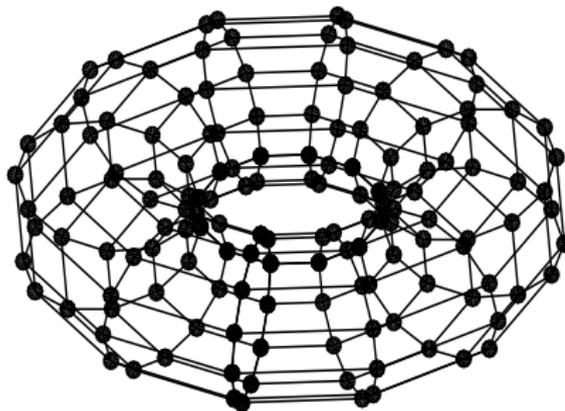
► grafo bilanciato:

$$m = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) + 1$$



► griglia toroidale:

$$m = 2n$$



Circuiti Euleriani

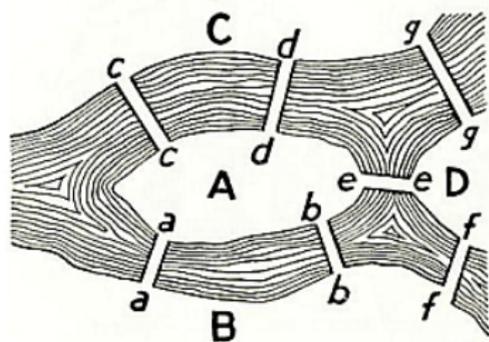
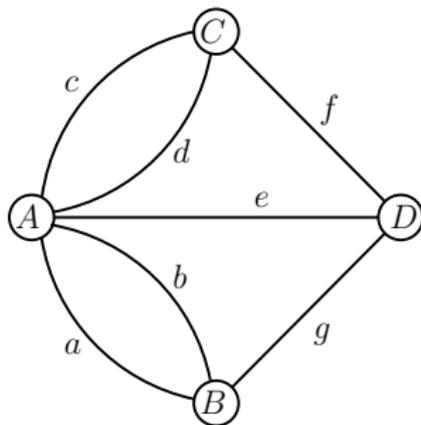


FIGURE 98. *Geographic Map:
The Königsberg Bridges.*

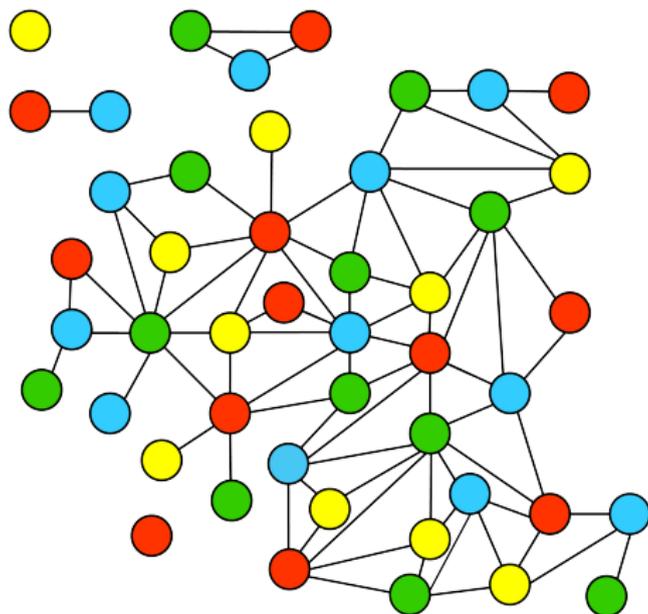


Dato \mathcal{G} , esiste un circuito Euleriano?

Teorema (Eulero): Grafo \mathcal{G} connesso

\mathcal{G} Euleriano \iff ogni nodo ha grado pari

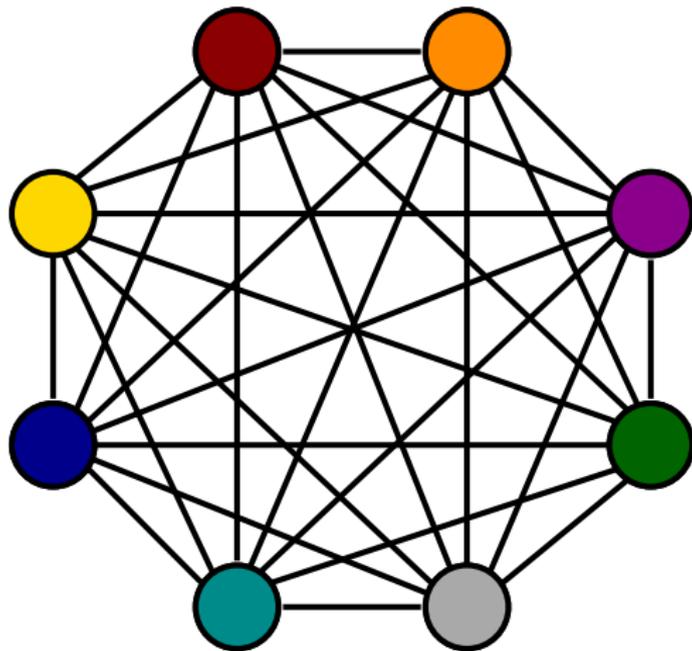
Il problema della colorazione di un grafo



- ▶ **Colorazione** di un grafo: assegnazione di colori ai nodi in modo tale che due nodi vicini non abbiano mai lo stesso colore
- ▶ **Numero cromatico** di un grafo \mathcal{G}

$$\chi(\mathcal{G}) = \text{minimo numero di colori necessari per colorare } \mathcal{G}$$

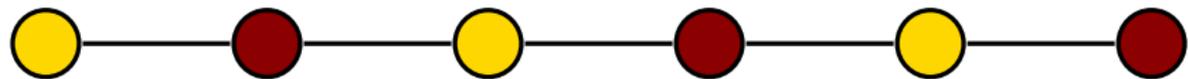
Numero cromatico



- ▶ Grafo completo di n nodi

$$\chi(\mathcal{G}) = n$$

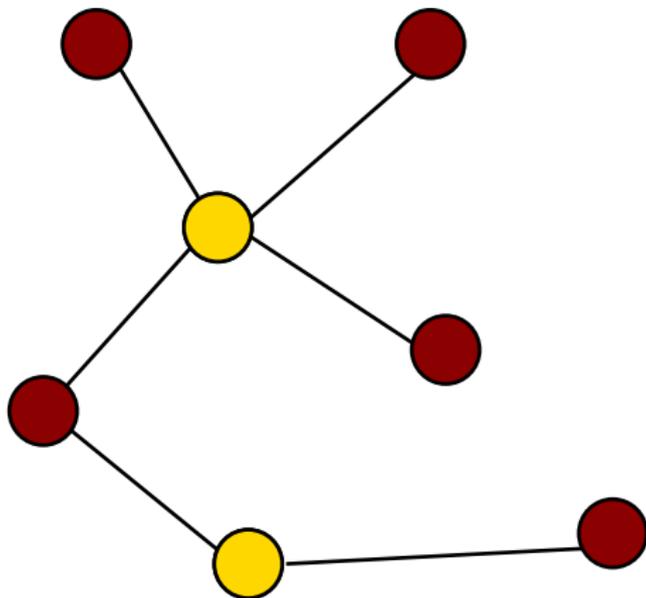
Numero cromatico



► Linea di n nodi

$$\chi(\mathcal{G}) = 2$$

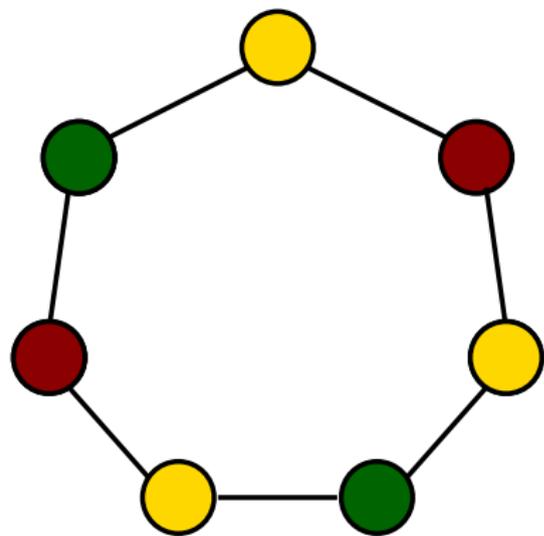
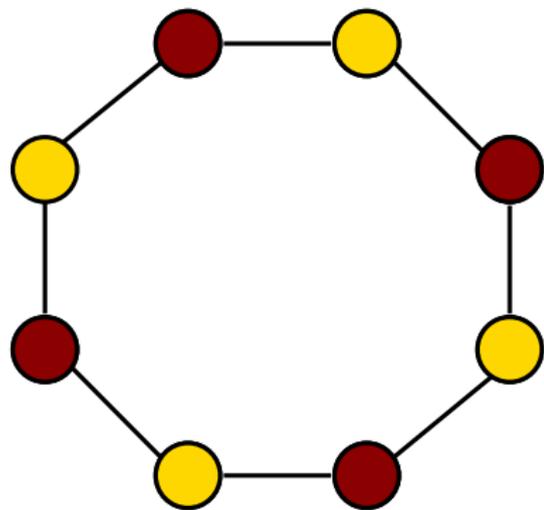
Numero cromatico



► Albero di n nodi

$$\chi(\mathcal{G}) = 2$$

Numero cromatico



► Anello di n nodi

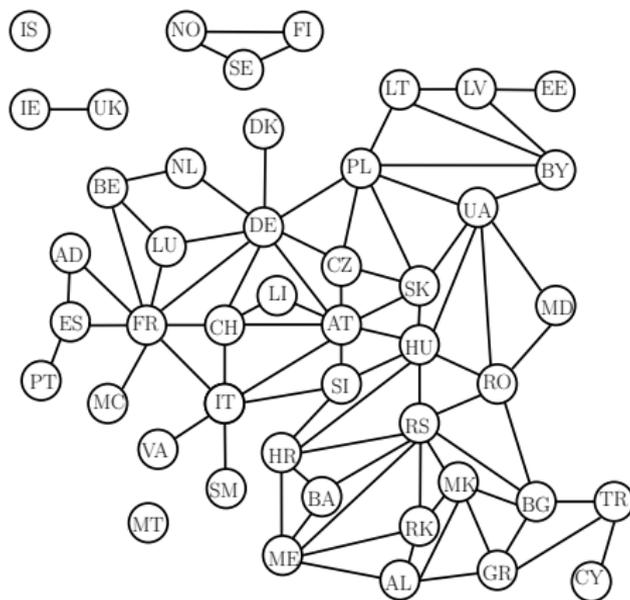
$$\chi(\mathcal{G}) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Che c'entra colorare una mappa geografica?



Grafi planari

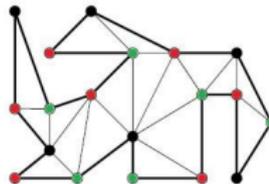
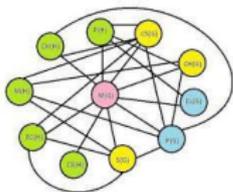
Un grafo che può essere raffigurato in un piano in modo che non si abbiano archi che si intersecano.



Teorema: I grafi planari hanno numero cromatico al più 4!
(Problema dei 4 colori)

Perchè è importante colorare i grafi?

Moltissime applicazioni in Informatica teorica e AI:

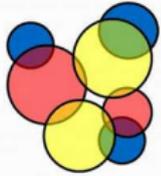


● = 6 Cameras needed

● = 7 Cameras needed

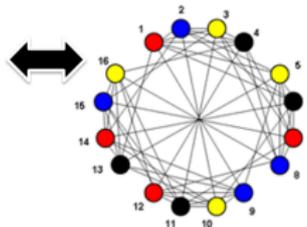
● = 6 Cameras needed

Radio Frequency Assignment Problem



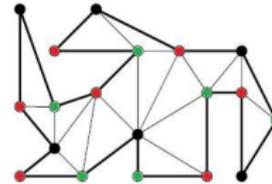
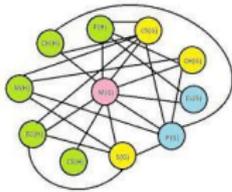
- In a given territory there are n radio stations. Each one is determined by its position (x,y) and has a range radius r . The frequencies should be assigned in such a way that no two radio stations with overlapping hearing ranges are assigned the same frequency and that the total number of frequencies is minimal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |



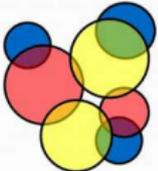
Perchè è importante colorare i grafi?

Moltissime applicazioni in Informatica teorica e AI:



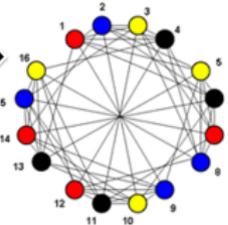
- = 6 Cameras needed
- = 7 Cameras needed
- = 6 Cameras needed

Radio Frequency Assignment Problem



- In a given territory there are n radio stations. Each one is determined by its position (x,y) and has a range radius r . The frequencies should be assigned in such a way that no two radio stations with overlapping hearing ranges are assigned the same frequency and that the total number of frequencies is minimal.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

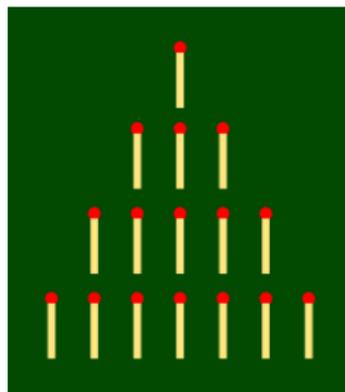


Calcolare il numero cromatico è un problema NP-completo (esplosione esponenziale della complessità di ogni algoritmo)

I punti di oggi

- ▶ Breve introduzione alla teoria dei grafi
- ▶ Breve introduzione alla teoria dei giochi
- ▶ I giochi su reti: il gioco di maggioranza, il gioco dei colori

Il gioco di Nim (o Marienbad)

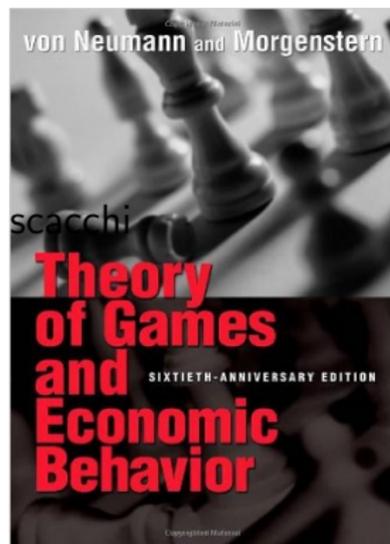


- ▶ A turno un giocatore può togliere quanti fiammiferi vuole da una riga
- ▶ Perde chi toglie l'ultimo fiammifero.

Charles Bouton (Harvard), 1902:

- ▶ Chi gioca per secondo ha una strategia vincente (facile).
- ▶ Chi gioca per primo perde se l'altro non sbaglia.

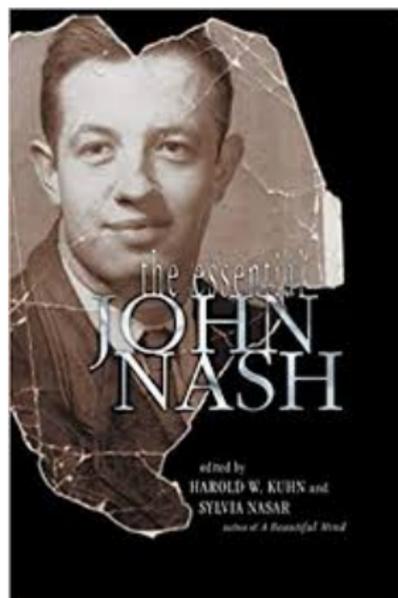
Nascita della Teoria dei Giochi



- ▶ 1713: Waldegrave, giochi di carte
- ▶ 1838: Cournot, teoria dei duopoli
- ▶ 1913: Zermelo, strategie ottimali negli
- ▶ 1928: Von Neumann:
“Theory of Games of Strategy”
- ▶ 1944: Von Neumann and Morgenstern:
Theory of games and economic behavior
- ▶ sviluppo durante la guerra fredda

Teoria dei Giochi

John Forbes Nash (1928-2015)



- ▶ 1950: PhD Thesis (Princeton):
“Non-cooperative games”
- ▶ 1950: PNAS paper
“Equilibrium points in n-person games”
- ▶ 1950: Econometrica paper
“The bargaining problem”
- ▶ 1951: Annals of Mathematics paper
“Non-cooperative games”
- ▶ 1953: Econometrica paper
“Two-person Cooperative Games”
- ...

▶ 1994 Premio Nobel per l'Economia: Harsanyi, Nash & Salten

Impatto della Teoria dei Giochi

in Economia:

- ▶ 1994 Premio Nobel per l'Economia: Harsanyi, Nash & Salten
- ▶ 2005 Premio Nobel per l'Economia: Shelling & Aumann
- ▶ 2007 Premio Nobel per l'Economia: Hurwicz, Maskin & Myerson
- ▶ 2012 Premio Nobel per l'Economia: Roth & Shapley
- ▶ 2014 Premio Nobel per l'Economia: Tirole
- ▶ 2020 Premio Nobel per l'Economia: Milgrom

e molti altri campi:

- ▶ Scienze Politiche: Downs (1957), Crisi dei missili di Cuba (1962)
- ▶ Biologia: Teoria Evolutiva dei Giochi, John M. Smith (1970s)
- ▶ Ingegneria: sistemi multi-agente, Internet, reti
- ▶ Apprendimento Automatico, Intelligenza Artificiale: GANs, pianificazione, soddisfacimento vincoli, *mechanism design*

Il Dilemma del Prigioniero



Frank e Cora arrestati.e accusati di un crimine.

Sono interrogati separatamente e viene formulata la stessa offerta:

- ▶ se entrambi confessano, vengono entrambi condannati a **3 anni**
- ▶ se uno solo confessa, lui/lei **libero**, l'altra/o **5 anni**
- ▶ se nessuno confessa, **1 anno** ciascuno (crimine minore)

Formalizzazione del Dilemma del Prigioniero

scelta di Cora

scelta di Frank

| | CONFESS | SILENT |
|---------|---------|--------|
| CONFESS | -3 | 0 |
| SILENT | -5 | -1 |

| | CONFESS | SILENT |
|---------|---------|--------|
| CONFESS | -3 | -5 |
| SILENT | 0 | -1 |

Strategie dominanti nel Dilemma del Prigioniero

| F | | C | C | |
|---|---------|---------|--------|--|
| | | CONFESS | SILENT | |
| C | CONFESS | -3 | -5 | |
| | SILENT | -5 | -1 | |

- ▶ qualsiasi cosa scelga Cora, per Frank è vantaggioso confessare
- ▶ Confessare è una **strategia dominante** per Frank

Strategie dominanti nel Dilemma del Prigioniero

| F | | C | C | |
|---|---------|---------|--------|--|
| | | CONFESS | SILENT | |
| C | CONFESS | -3, -3 | -5, 0 | |
| | SILENT | 0, -5 | -1, -1 | |

- ▶ qualsiasi cosa scelga Frank, per Cora è vantaggioso confessare
- ▶ Confessare è una **strategia dominante** per Cora

Equilibri di Nash nel Dilemma del Prigioniero

| F | | C | CONFESS | SILENT |
|---|---------|----|---------|--------|
| | | C | -3 | -5 |
| C | CONFESS | -3 | 0 | |
| | SILENT | -5 | -1 | |

- ▶ per entrambi confessare è strategia dominante
- ▶ ciascuno **non ha incentivo a deviare unilateralmente**
- ▶ (Confess, Confess) *equilibrio di Nash*
- ▶ se entrambi restassero in silenzio, entrambi ci guadagnerebbero

Come indurre la cooperazione nel Dilemma del Prigioniero?

Tre ipotesi

- ▶ gioco giocato solo una volta
- ▶ Cora e Frank non comunicano
- ▶ il loro unico interesse è minimizzare il tempo in carcere

Come indurre la cooperazione nel Dilemma del Prigioniero?

Tre ipotesi

- ▶ gioco giocato solo una volta
- ▶ Cora e Frank non comunicano
- ▶ il loro unico interesse è minimizzare il tempo in carcere

Se due intelligenze artificiali identiche giocassero il dilemma del prigioniero, confesserebbero?

Come indurre la cooperazione nel Dilemma del Prigioniero?

Tre ipotesi

- ▶ gioco giocato solo una volta
- ▶ Cora e Frank non comunicano
- ▶ il loro unico interesse è minimizzare il tempo in carcere

Se due intelligenze artificiali identiche giocassero il dilemma del prigioniero, confesserebbero?

- ▶ Una particolare argomentazione: sapendo di essere progettati identici, ogni agente ritiene che se decide di cooperare, anche l'altro lo farà e che quindi quella è la scelta migliore... *Evidential decision theory*

Come indurre la cooperazione nel Dilemma del Prigioniero?

Tre ipotesi

- ▶ gioco giocato solo una volta
- ▶ Cora e Frank non comunicano
- ▶ il loro unico interesse è minimizzare il tempo in carcere

Se due intelligenze artificiali identiche giocassero il dilemma del prigioniero, confesserebbero?

- ▶ Una particolare argomentazione: sapendo di essere progettati identici, ogni agente ritiene che se decide di cooperare, anche l'altro lo farà e che quindi quella è la scelta migliore... *Evidential decision theory*
- ▶ **Viola il principio di razionalità**

Come indurre la cooperazione nel Dilemma del Prigioniero?

Tre ipotesi

- ▶ gioco giocato solo una volta
- ▶ Cora e Frank non comunicano
- ▶ il loro unico interesse è minimizzare il tempo in carcere

Dilemma del Prigioniero Modificato

| F \ C | | CONFESS | SILENT |
|---------------------------------|---|---------|--------|
| | | C | S |
| C O N F E S S | C | -3 | -5 |
| | S | -3 | -2 |
| S I L E N T | C | -2 | -1 |
| | S | -5 | -1 |

- ▶ se Cora confessa, a Frank conviene confessare
- ▶ se Cora non confessa, a Frank conviene non confessare
- ▶ nessuna strategia dominante, **risposta migliore** dipende dalla scelta di Cora

Dilemma del Prigioniero Modificato

| F \ C | CONFESS | SILENT |
|---------------------------------|---------|---------|
| C O N F E S S | -3 / -3 | -5 / -2 |
| S I L E N T | -2 / -5 | -1 / -1 |

- ▶ se Frank confessa, a Cora conviene confessare
- ▶ se Frank non confessa, a Cora conviene non confessare
- ▶ nessuna strategia dominante, **risposta migliore** dipende dalla scelta di Frank

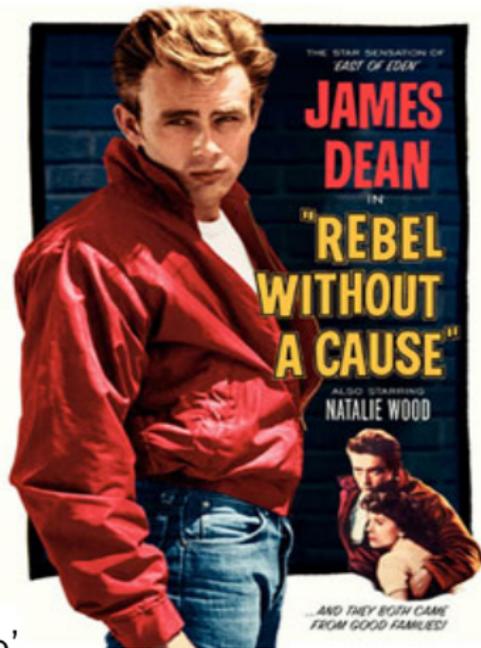
Dilemma del Prigioniero Modificato

| F \ C | | C | |
|---------------------------------|---|---------|--------|
| | | CONFESS | SILENT |
| C O N F E S S | C | -3 | -5 |
| | S | -3 | -2 |
| S I L E N T | C | -2 | -1 |
| | S | -5 | -1 |

- ▶ nessuna strategia dominante (gioco di coordinamento)
- ▶ la risposta migliore è copiare la scelta dell'altro
- ▶ 2 equilibri di Nash: (Confess, Confess), (Silent, Silent) **entrambi non hanno incentivo a deviare unilateralmente**

Il gioco del Pollo

- ▶ due auto in rotta di collisione
- ▶ ciascun conducente può andare dritto o sterzare
- ▶ se uno sterza mentre l'altro va dritto è il "pollo"
- ▶ chi va dritto mentre l'altro sterza è coraggioso
- ▶ se entrambi vanno dritti entrambi muoiono
- ▶ se entrambi sterzano, perdono un po' la faccia ma evitano guai peggiori



Il gioco del Pollo

| | SWERVE | STRAIGHT |
|----------|--------|------------|
| SWERVE | 0, 0 | 1, -1 |
| STRAIGHT | -1, 1 | -100, -100 |

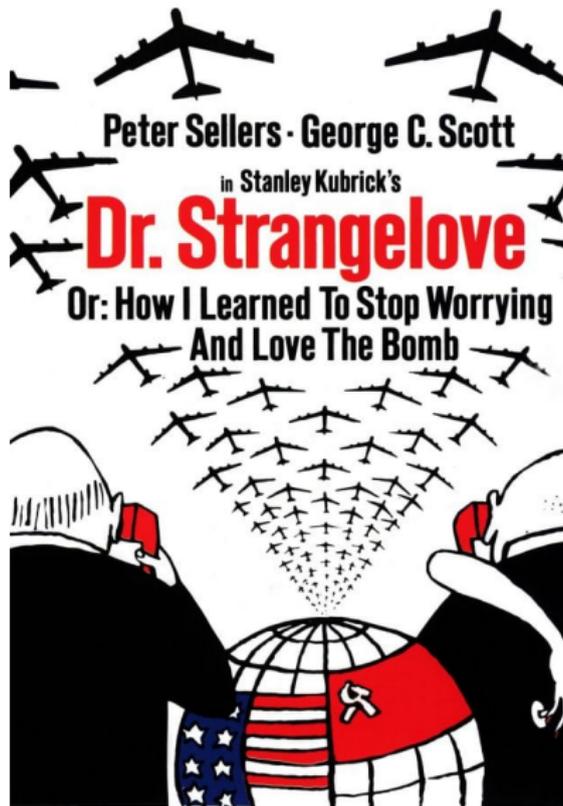
- ▶ se l'altro va dritto meglio girare
- ▶ se l'altro sterza meglio andar dritto
- ▶ risposta migliore dipende dalla scelta dell'altro
- ▶ 2 equilibri di Nash: nessun incentivo a deviare unilateralmente

Il gioco del Pollo

| | SWERVE | STRAIGHT |
|----------|--------|------------|
| SWERVE | 0, 0 | 1, -1 |
| STRAIGHT | -1, 1 | -100, -100 |

- ▶ 1959 B. Russell "Common Sense and Nuclear Warfare"
- ▶ 1973 Maynard Smith and Price, "The logic of animal conflict"
- ▶ 1964 S. Kubrik "Dr. Stranamore"

Il gioco del Pollo



Peter Sellers · George C. Scott

in Stanley Kubrick's

Dr. Strangelove

Or: How I Learned To Stop Worrying
And Love The Bomb

ALSO STARRING
STERLING HAYDEN · KEENAN WYNN · SLIM PICKENS AND INTRODUCING TRACY REED
(AS MISS FOREIGN AFFAIRS)

SCREENPLAY BY STANLEY KUBRICK, PETER GEORGE & TERRY SOUTHERN

BASED ON THE BOOK 'RED ALERT' BY PETER GEORGE

PRODUCED & DIRECTED BY STANLEY KUBRICK A COLUMBIA PICTURES RELEASE

Nozioni base

Gioco in forma strategica:

- ▶ \mathcal{V} insieme di *giocatori*
- ▶ \mathcal{A} insieme di *azioni*
- ▶ $x_i =$ azione del giocatore i
- ▶ $x_{-i} =$ azioni di tutti i giocatori tranne i
- ▶ $u_i(x_i, x_{-i})$ utilità di i quando gioca x_i e tutti gli altri x_{-i}
- ▶ scelta razionale per un giocatore: risposta ottimale

$$\mathcal{B}_i(x_{-i}) = \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i})$$

- ▶ equilibrio di Nash (a strategia pura)

$$x_i \in \mathcal{B}_i(x_{-i}) \quad \text{per ogni giocatore } i$$

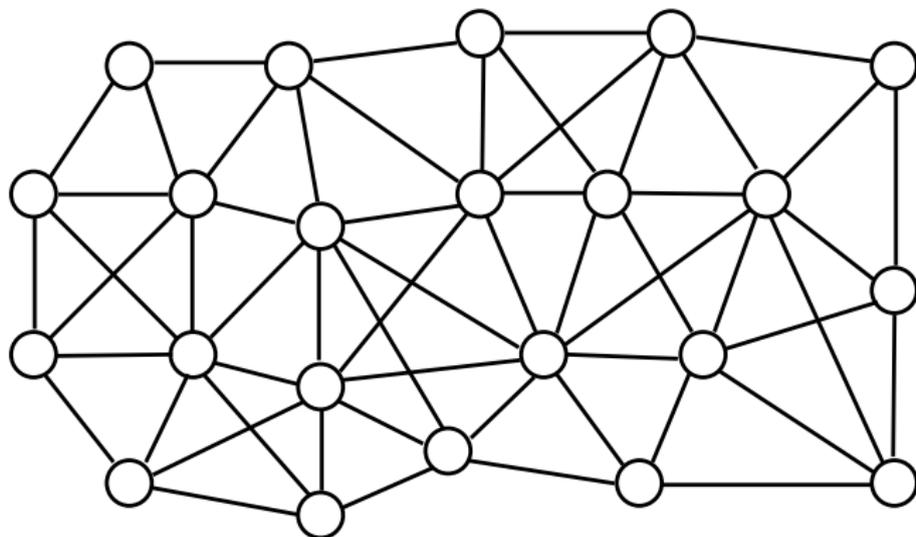
- ▶ **esternalità**: scegliendo la mia azione modifico non solo mia utilità ma anche quella degli altri giocatori

I punti di oggi

- ▶ Breve introduzione alla teoria dei grafi
- ▶ Breve introduzione alla teoria dei giochi
- ▶ I giochi su reti: il gioco di maggioranza, il gioco dei colori

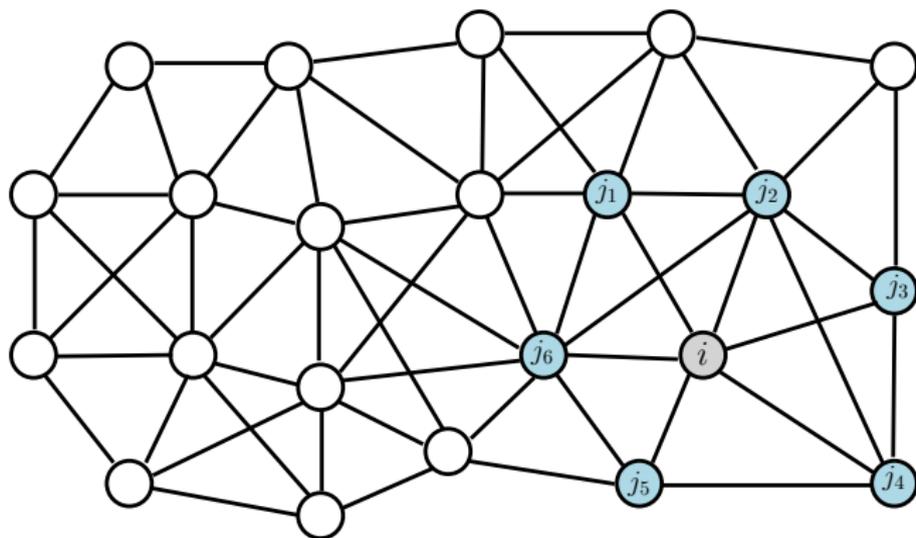
Giochi su reti

- ▶ I giocatori sono i vertici di un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$
- ▶ L'utilità di un giocatore dipende solo dalla sua azione e dalle azioni giocate dai suoi vicini.



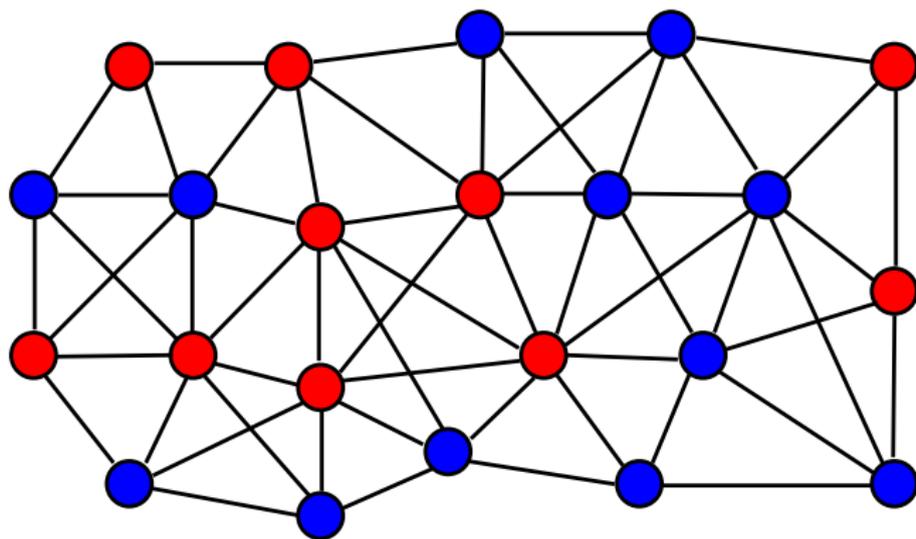
Giochi su reti

- ▶ I giocatori sono i vertici di un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$
- ▶ L'utilità di un giocatore dipende solo dalla sua azione e dalle azioni giocate dai suoi vicini.



$$u_i(x_i, x_{-i}) = f(x_i, x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, x_{j_4}, x_{j_5})$$

Il gioco di maggioranza

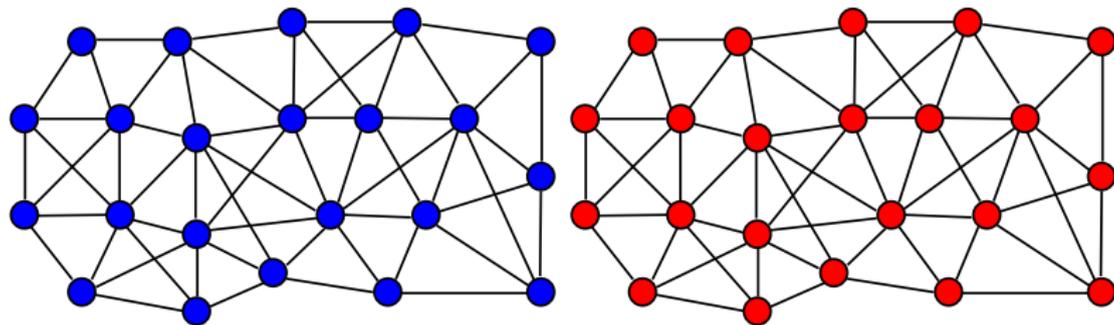


Ogni giocatore ha un'opinione $+1$ o -1 (cioè $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$)

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \sum_{j \leftrightarrow i} \frac{x_i x_j + 1}{2} = \text{numero vicini d'accordo con } i$$

Il gioco di maggioranza

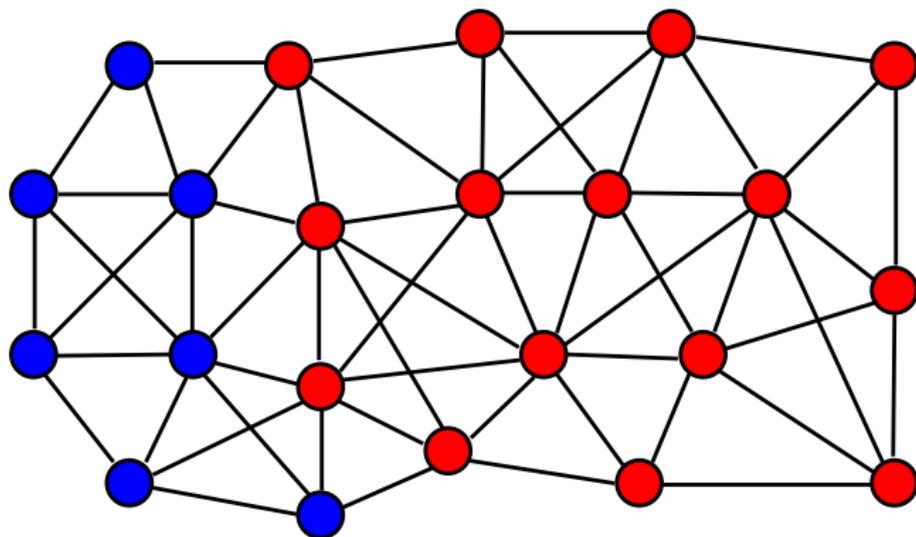
- Equilibri di Nash: ogni giocatore segue la maggioranza dei vicini



Le configurazioni di consenso sono sempre equilibri di Nash.

Il gioco di maggioranza

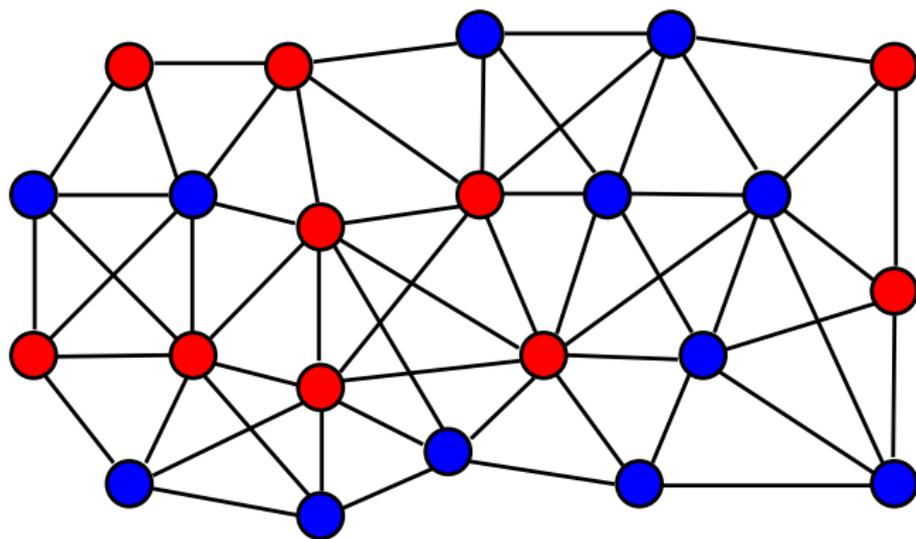
- ▶ Equilibri di Nash: ogni giocatore segue la maggioranza dei vicini



Anche questo sopra è un Nash.

Dato un grafo, stabilire se ci sono equilibri di Nash che non sono consensi è un problema NP-completo

Gioco di minoranza

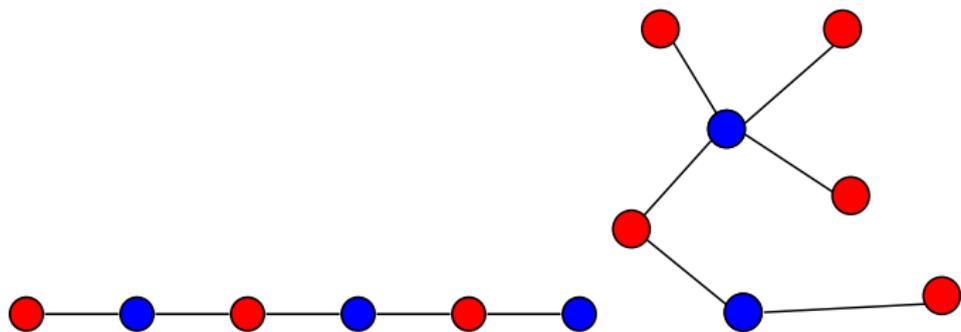


Ogni giocatore ha un'opinione $+1$ o -1 (cioè $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$)

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \sum_{j \leftrightarrow i} \frac{x_i x_j - 1}{2} = \text{numero vicini in disaccordo con } i$$

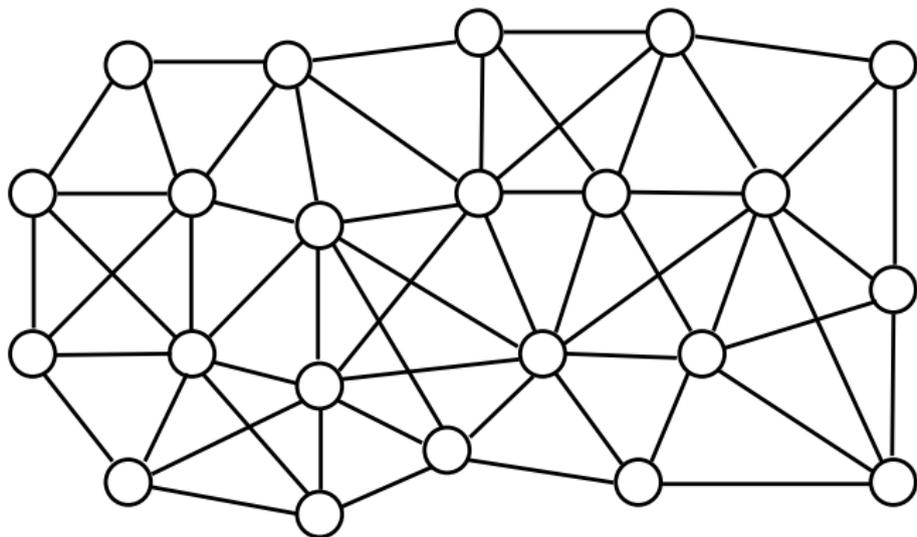
Il gioco di minoranza

- ▶ Equilibri di Nash: ogni giocatore segue la minoranza dei vicini



Il gioco di minoranza

► Equilibri di Nash?



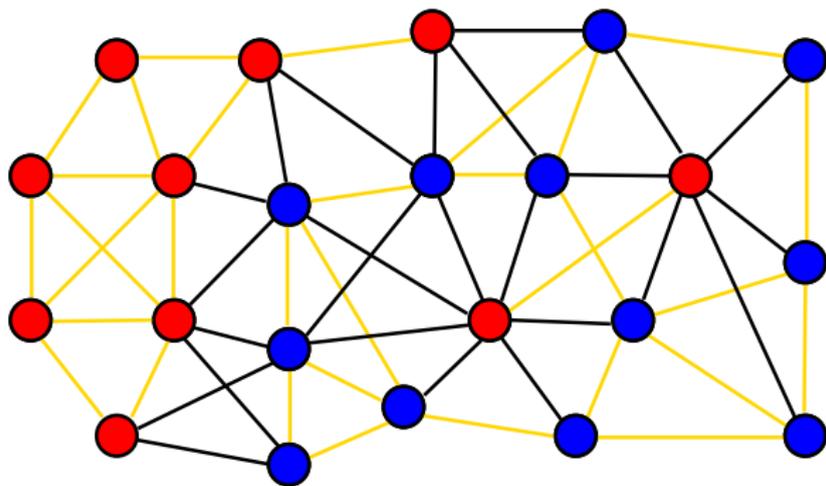
Competizione o cooperazione?

- ▶ stiamo considerando giochi competitivi: ogni giocatore è interessato solo a massimizzare la propria utilità
- ▶ in alcuni casi, così facendo, i giocatori (senza volerlo) contribuiscono a massimizzare una “utilità di sistema” chiamata potenziale
- ▶ Gioco **potenziale**: esiste una funzione **potenziale** tale che quando un giocatore i sceglie tra due azioni, con tutti gli altri giocatori fermi sulla loro azione, la differenza dell'utilità che i riceverebbe con l'una o con l'altra coincide con la differenza dei corrispondenti potenziali: **allineamento di utilità**

Competizione o cooperazione?

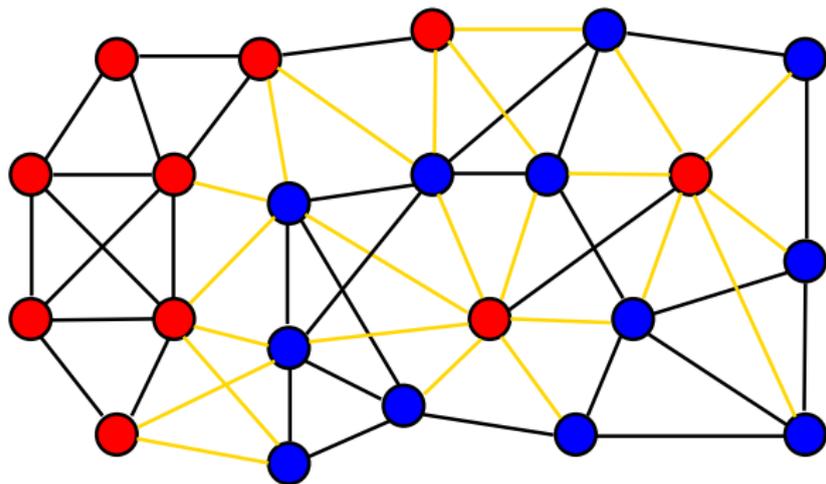
- ▶ stiamo considerando giochi competitivi: ogni giocatore è interessato solo a massimizzare la propria utilità
- ▶ in alcuni casi, così facendo, i giocatori (senza volerlo) contribuiscono a massimizzare una “utilità di sistema” chiamata potenziale
- ▶ Gioco **potenziale**: esiste una funzione **potenziale** tale che quando un giocatore i sceglie tra due azioni, con tutti gli altri giocatori fermi sulla loro azione, la differenza dell'utilità che i riceverebbe con l'una o con l'altra coincide con la differenza dei corrispondenti potenziali: **allineamento di utilità**
- ▶ **Teorema**: Tutti i giochi potenziali ammettono sempre almeno un equilibrio di Nash a strategia pura. (punto di max del potenziale)

Gioco di maggioranza è potenziale



- ▶ potenziale = numero globale di archi in accordo
- ▶ max del potenziale = configurazione di consenso

Gioco di minoranza è potenziale



- ▶ potenziale = numero globale di archi in **disaccordo**
- ▶ Su qualunque grafo indiretto, il gioco di minoranza ammette un equilibrio di Nash!

Giochi non potenziali

- ▶ Il Dis-coordinamento e morra cinese non sono giochi potenziali

| | | |
|----|------|------|
| | -1 | +1 |
| -1 | 1,-1 | -1,1 |
| +1 | -1,1 | 1,-1 |

| | | | |
|---|------|------|------|
| | R | S | P |
| R | 0,0 | 1,-1 | -1,1 |
| S | -1,1 | 0,0 | 1,-1 |
| P | 1,-1 | -1,1 | 0,0 |

Algoritmi di apprendimento per giochi

- ▶ Come fanno gli agenti a raggiungere un equilibrio di Nash?
- ▶ la teoria classica non lo spiega...

Algoritmi di apprendimento per giochi

- ▶ Come fanno gli agenti a raggiungere un equilibrio di Nash?
- ▶ la teoria classica non lo spiega...
- ▶ *Dinamica di risposta ottimale*: gli agenti continuano a modificare le loro azioni sempre scegliendo una risposta ottimale.
- ▶ **Teorema**: In ogni gioco potenziale, la dinamica di risposta ottimale converge ad un equilibrio di Nash, **non necessariamente un massimo del potenziale**.

Algoritmi di apprendimento per giochi

- ▶ *Dinamica di risposta ottimale rumorosa*: gli agenti continuano a modificare le loro azioni scegliendo 'spesso' una risposta ottimale, ma talvolta 'commettono errori' e scelgono azioni non ottimali.

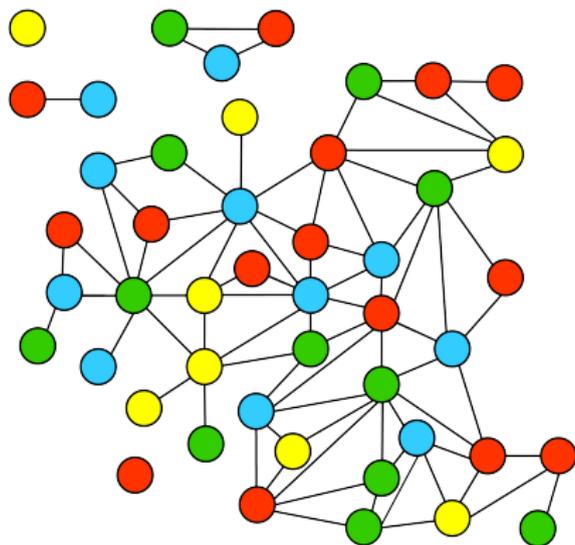
Algoritmi di apprendimento per giochi

- ▶ *Dinamica di risposta ottimale rumorosa*: gli agenti continuano a modificare le loro azioni scegliendo 'spesso' una risposta ottimale, ma talvolta 'commettono errori' e scelgono azioni non ottimali.
- ▶ In questo caso il sistema continua a fluttuare come un sistema fisico che venga riscaldato.
- ▶ **Teorema**: In ogni gioco potenziale, la dinamica di risposta ottimale rumorosa conduce il sistema in un equilibrio 'termico' descritto da una misura di Gibbs. Quando il rumore viene portato a 0, il sistema si 'congela' sui massimi del potenziale.

Algoritmi di apprendimento per giochi

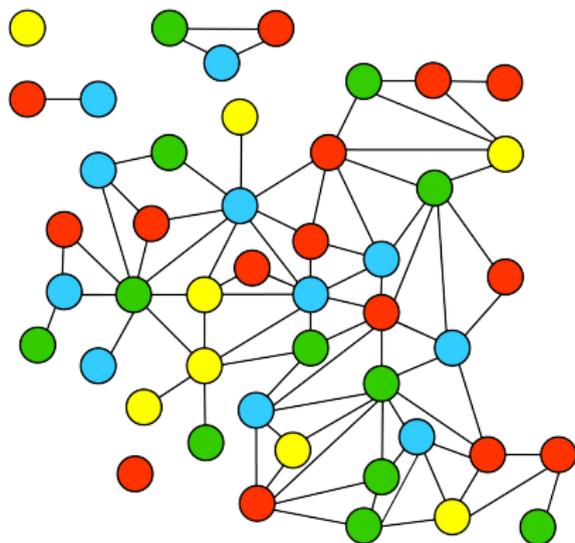
- ▶ *Dinamica di risposta ottimale rumorosa*: gli agenti continuano a modificare le loro azioni scegliendo 'spesso' una risposta ottimale, ma talvolta 'commettono errori' e scelgono azioni non ottimali.
- ▶ In questo caso il sistema continua a fluttuare come un sistema fisico che venga riscaldato.
- ▶ **Teorema**: In ogni gioco potenziale, la dinamica di risposta ottimale rumorosa conduce il sistema in un equilibrio 'termico' descritto da una misura di Gibbs. Quando il rumore viene portato a 0, il sistema si 'congela' sui massimi del potenziale.
- ▶ La dinamica di risposta ottimale rumorosa è sia un modello di comportamento umano (razionalità limitata), sia un modo efficace di progettare algoritmi decentralizzati a bassa complessità.

Gioco della colorazione di un grafo



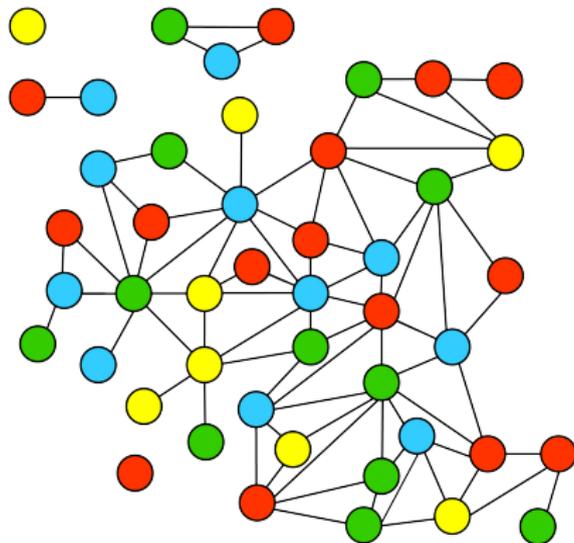
- ▶ giocatori \leftrightarrow nodi
- ▶ azioni \leftrightarrow colori (da un insieme prefissato)
- ▶ utilità del nodo $i = -$ numero vicini con lo stesso colore

Gioco della colorazione di un grafo



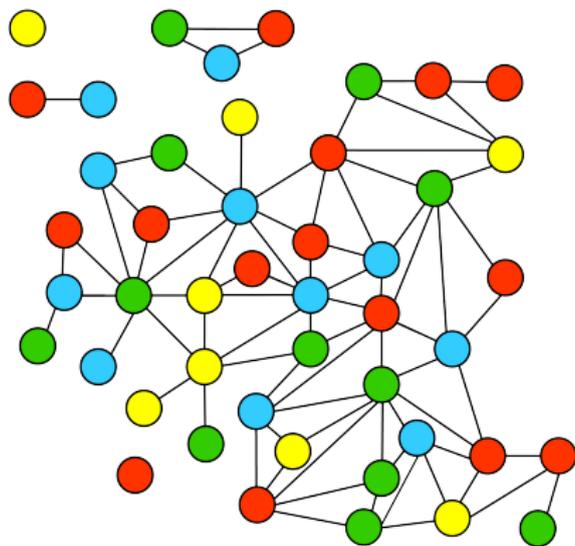
- ▶ giocatori \leftrightarrow nodi
- ▶ azioni \leftrightarrow colori
- ▶ utilità del nodo $i = -$ numero vicini con lo stesso colore
- ▶ colorazioni perfette sono equilibri di Nash (non nec. vice versa)

Gioco della colorazione di un grafo



- ▶ utilità del nodo $i = -$ numero vicini con lo stesso colore
- ▶ colorazioni perfette sono equilibri di Nash
- ▶ è un gioco potenziale con
potenziale $= -$ numero di archi tra due nodi con lo stesso colore

Gioco della colorazione di un grafo

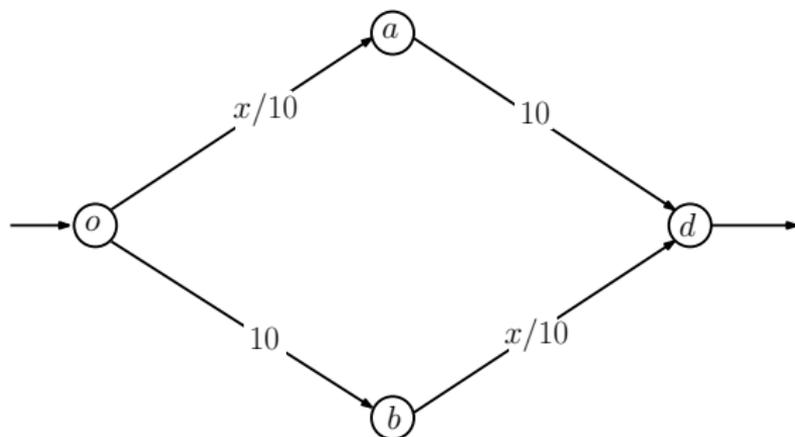


► è un gioco potenziale con

potenziale = $-$ numero di archi tra due nodi con lo stesso colore

► dinamica di risposta ottimale rumorosa converge ai massimi del potenziale: colorazioni perfette quando esistono

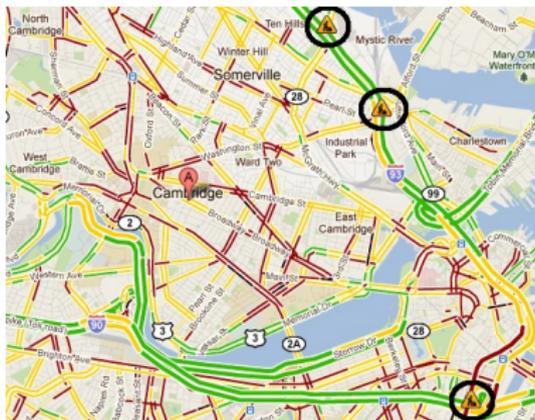
Gioco di congestione



- ▶ giocatori \leftrightarrow automobilisti
- ▶ azioni \leftrightarrow cammini semplici da o a d
- ▶ utilità = - tempo percorrenza
- ▶ tempo di percorrenza crescente con congestione sull'arco

Gioco di congestione

- ▶ Quello del traffico è un problema decisionale complesso: un agente può scegliere un percorso, ma anche cambiarlo mentre lo sta percorrendo.
- ▶ Le nuove tecnologie informatiche possono aiutare?



- ▶ Le indicazioni di traffico possono anche creare deleterie sincronizzazioni di comportamenti
- ▶ *Information design*: dare agli utenti informazioni diversificate in modo da far raggiungere un'ottimo di sistema.

Conclusione

- ▶ l'era delle reti (complesse)
- ▶ la teoria dei giochi permette di modellare il comportamento di agenti strategici, siano essi umani, macchine, oggetti virtuali.
- ▶ I giochi su reti formano un paradigma per lo studio delle interazioni complesse
- ▶ coordinamento, colorazione, congestione
- ▶ enormi applicazioni: informatica teorica, scienze sociali, economia, ingegneria dei sistemi

Molto di più ...

Alcuni link

- ▶ <https://staff.polito.it/fagnani.fabio/>
- ▶ <https://networks.polito.it>
- ▶ <https://areeweb.polito.it/disma-excellence/index.html>
- ▶ https://didattica.polito.it/laurea/matematica_ingegneria/it/
- ▶ <https://www.smaile.it>